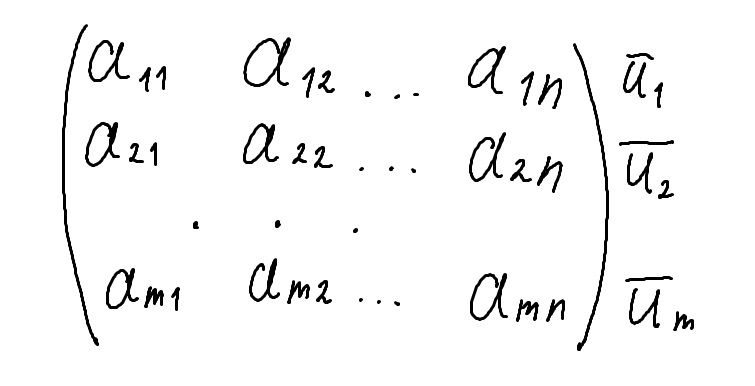
## Ранг матрицы

### Вычисление ранга матрицы



Рассмотрим следующую матрицу **n**x**m**, где **n** не всегда равен **m**

Строки матрицы можно представить как векторы

– это еще и n-мерные векторы, где

– координаты вектора

Линейно независимые векторы:

Где (нулевой вектор, все m координат = 0)

Тогда и только тогда, когда

И ТОЛЬКО В ЭТОМ СЛУЧАЕ

Линейно зависимая система векторов:

При хотя бы одном

У матрицы, которая является линейно зависимой системой векторов, определитель = 0

**Лемма:**

Пусть дана линейно независимая система векторов:

Пусть новый вектор не является линейной комбинацией векторов , то есть

При любых

Тогда вектора линейно независимы

Доказательство от противного:

Предположим, что - линейно зависимы

Тогда:

При этом , т.к. при:

То есть окажется, что система векторов линейно зависима, хотя это противоречит условиям.

Если же , тогда:

То есть:

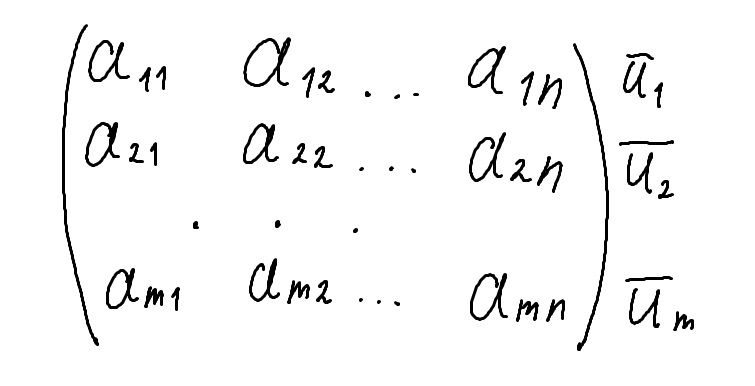
То есть при каких-то коэффициентах

– это линейная комбинация , что противоречит условиям.

Что и требовалось доказать.

Ранг матрицы – это максимальное число линейно независимых строк в матрице. , если в матрице k линейно независимых строк.

То же самое можно сказать о столбцах. , если в матрице k линейно независимых столбцов.



Дана матрица размерами **n**x**m**, где **n** не всегда равен **m**.

Минор k-го порядка такой матрицы – это определитель матрицы размера **k**x**k** внутри данной матрицы, где:

Допустим, мы выбрали какой-то минор k-го порядка. Окаймляющие миноры k+1-го порядка – это все миноры k+1-го порядка, которые содержат – минор k-го порядка.

Серым помечен один из миноров k-го порядка для данной матрицы.

Голубым помечен один из окаймляющих миноров k+1 порядка, который содержит выбранный минор k-го порядка.

**Теорема**

Пусть в матрице

То есть матрица A размеров **n**x**m**.

Предполагается, что в ней есть , все окаймляющие миноры которого = 0. Тогда ранг матрицы = k.

**Доказательство:**

Дана матрица

Я хочу, чтобы минор находился в левом верхнем углу. Тогда мы находим нужный нам минор и с помощью элементарных преобразований передвигаем строки и столбцы так, чтобы этот минор оказался на нужном нам месте.

Теперь матрица имеет вид:

Где серым отмечен наш

Без ограничения общности мы можем предположить, что минор лежит в левом верхнем углу.

Нам достаточно доказать, что первые k строк линейно независимые, а остальные строки в матрице зависят от этих первых k строк.

Если бы первые k строк были бы линейно зависимыми, то одна из строк k-го минора была бы линейной комбинацией других строк, то есть ее можно было бы превратить в нулевую строку. В этом случае определитель минора был бы равен 0, что противоречило бы условиям.

То есть тот факт, что определитель k-го минора != 0, говорит нам о том, что при приведении этих строк к ступенчатому виду у нас не появится нулевых строк. Эти строки линейно независимы.

Докажем, что остальные строки линейно зависимы.

По условию все окаймляющие миноры k+1 порядка у нас равны 0, в то время как какой-то минор k-го порядка, выведенный в левый верхний угол, не равен 0.

Тогда можно сделать следующие действия для любой строки и для любого столбца вне минора k-го порядка:

1. Нужный нам элемент должен находиться на месте . Для этого можно передвигать любые столбцы и строки вне k-го минора. Для примера переставим местами k+1 строку и последнюю m-ю строку.

На месте у нас . Тогда разложим минор k+1 порядка по элементам k+1 столбца.

*(по условию)*

Где M != 0 по условию, а – какие-то вещественные числа. Тогда:

То есть – это комбинация элементов своего столбца с какими-то коэффициентами.

Передвигаем все остальные столбцы вне минора. Получится тот же самый коэффициент, потому что при определении коэффициента мы рассматриваем алгебраические дополнения, содержащиеся в миноре k-го порядка и выбранной строке, которые не меняются. Поэтому получается, что все рассматриваемые элементы выбранной строки являются линейной комбинацией элементов первых k строк.

Затем меняем строку и повторяем процесс. Получается то же самое, только коэффициент для новой строки меняется (или не меняется, зависит от матрицы). Получается, что все элементы вне строк и столбцов минора являются линейной комбинацией вышестоящих элементов первых k строк.

1. Теперь рассмотрим столбцы, входящие в минор k-го порядка. Мы можем дублировать эти столбцы, что по своей сути является разложением минора k+1 порядка по выбранному столбцу, но при этом берутся алгебраические дополнения k+1 столбца.  
   Для примера возьмем первый столбец минора k+1 порядка и разложим его по алгебраическим дополнениям k+1 столбца. Тогда мы рассматриваем следующую матрицу

Очевидно, что определитель такого минора = 0, т.к. у нас есть 2 одинаковых столбца. Тогда разложим этот минор по k+1 столбцу.

Тогда:

Получилось, что все строки и все столбцы вне минора k-го порядка линейно зависимы от первых k строк и первых k столбцов соответственно. Тогда у нас k линейно независимых строк и k линейно независимых столбцов.